

## Pola dan Lintasan Kesalahan Mahasiswa dalam Pemecahan Masalah Trigonometri *Open-Ended*

Fauziyyah Alimuddin<sup>1</sup>, Suradi<sup>2</sup>, Syamsinar<sup>3</sup>, Nuratika Rahmat Kalla<sup>4</sup>

*Program Studi Pendidikan Matematika, Jurusan Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Negeri Makassar, Makassar, Indonesia<sup>1,2,3,4</sup>*

[fauziyyah.alimuddin@unm.ac.id](mailto:fauziyyah.alimuddin@unm.ac.id)<sup>1</sup>, [suraditahmir@unm.ac.id](mailto:suraditahmir@unm.ac.id)<sup>2</sup>, [syamsinar@unm.ac.id](mailto:syamsinar@unm.ac.id)<sup>3</sup>, [nuratika.rahmat.kalla@unm.ac.id](mailto:nuratika.rahmat.kalla@unm.ac.id)<sup>4</sup>

**Corresponding Author:** Fauziyyah Alimuddin, E-mail: [fauziyyah.alimuddin@unm.ac.id](mailto:fauziyyah.alimuddin@unm.ac.id)

### Article Information

Received : 30 August 2026  
Revised : 30 September 2026  
Accepted : 20 October 2026  
Published : 20 October 2026

### ABSTRACT

This study aims to identify error patterns and trace students' error trajectories in solving open-ended trigonometry problems based on Polya's problem-solving stages. An exploratory qualitative approach with cross-case analysis was employed. The participants were 85 first-year undergraduate students enrolled in a Trigonometry course in the second semester of the 2025/2026 academic year. Four open-ended problems yielded 340 responses, which were analyzed across four stages: understanding the problem, devising a plan, carrying out the plan, and looking back. Errors were categorized as conceptual, representational, strategic, procedural, and verification errors. Eight students were purposively selected for interviews to clarify their problem-solving processes in specific cases. The findings revealed that error patterns varied according to the demands of each problem. Strategic and procedural errors predominated in general triangle problems, conceptual and verification errors were prominent in trigonometric identity proofs, whereas representational and strategic errors dominated function modeling and graphing problems. Cross-case analysis identified four main error trajectories: representational errors that propagated into strategic and procedural errors; adequate problem understanding accompanied by inappropriate or undeveloped strategies; appropriate strategies followed by errors during execution; and correct execution followed by inadequate verification. These findings extend Polya-based error analysis beyond stage-specific classification by tracing the relationships among errors across successive stages of the problem-solving process.

### KEYWORDS

Analisis Kesalahan, Lintasan Kesalahan, Masalah *Open-Ended*, Polya, Trigonometri

### ARTICLE DOI:

<https://doi.org/10.53696/venn.v5i5.664>

---

**How to Cite:** Alimuddin, F., Suradi, S., Syamsinar, S., & Kalla, N. R. (2026). Pola dan Lintasan Kesalahan Mahasiswa dalam Pemecahan Masalah Trigonometri Open-Ended. *Venn: Journal of Sustainable Innovation on Education, Mathematics and Natural Sciences*, 5(5), 1250–1262.  
<https://doi.org/10.53696/venn.v5i5.664>

---

### A. Pendahuluan

Pemecahan masalah trigonometri menuntut mahasiswa tidak hanya mengingat rumus, tetapi juga memahami hubungan antarunsur, memilih konsep yang sesuai, dan menggunakannya secara tepat dalam proses penyelesaian. Kesulitan terhadap konsep trigonometri masih ditemukan bahkan pada mahasiswa dan calon guru matematika. ([Nabie dkk., 2018](#)) menunjukkan bahwa sebagian calon guru

memiliki keterbatasan pengetahuan konseptual terhadap konsep-konsep dasar trigonometri, sedangkan ([Hidayat & Aripin, 2020](#)) menemukan kesalahan mahasiswa pada dimensi pengetahuan faktual, konseptual, prosedural, dan metakognitif. Kesalahan konseptual, prinsip, faktual, dan perhitungan juga ditemukan pada mahasiswa ketika menentukan nilai fungsi trigonometri ([Setiawan & Sunardi, 2023](#)). Pada tingkat sekolah, kesulitan serupa tampak dalam kesalahan memahami masalah, mentransformasikan informasi, menerapkan rumus atau identitas, dan menjalankan prosedur penyelesaian ([Obeng dkk., 2024](#); [Sulistyaningsih dkk., 2021](#)). Oleh karena itu, kesulitan dalam trigonometri perlu dipahami melalui proses yang dilalui mahasiswa ketika membangun penyelesaian, bukan hanya berdasarkan benar atau salahnya jawaban akhir.

Kesalahan dalam pemecahan masalah tidak selalu menunjukkan jenis kesulitan yang sama. Jawaban akhir yang salah dapat berkaitan dengan pemahaman konsep, penggunaan representasi, pemilihan prinsip atau strategi, pelaksanaan prosedur, maupun pemeriksaan terhadap hasil yang diperoleh. Penelitian pada mahasiswa dalam mata kuliah trigonometri memperlihatkan bahwa kesalahan dapat dibedakan menjadi beberapa karakteristik, seperti kesalahan faktual, konseptual, prinsip, prosedural, dan perhitungan ([Setiawan & Sunardi, 2023](#)). Sementara itu, penelitian yang menggunakan Newman menunjukkan adanya kesalahan memahami, mentransformasikan, menjalankan keterampilan proses, dan menuliskan jawaban dalam penyelesaian masalah trigonometri ([Obeng dkk., 2024](#)). Dengan demikian, identifikasi jenis kesalahan memberikan informasi mengenai karakteristik kesulitan mahasiswa, tetapi belum sepenuhnya menjelaskan pada bagian mana kesalahan mulai muncul dan bagaimana proses penyelesaian berkembang setelahnya.

Tahapan Polya memberikan kerangka untuk menelusuri posisi munculnya kesalahan melalui memahami masalah, menyusun rencana, melaksanakan rencana, dan memeriksa kembali ([Pólya, 2014](#)). Penelitian trigonometri menunjukkan bahwa kesalahan dapat muncul pada seluruh tahap tersebut dan memiliki karakteristik yang berbeda ([Maharani & Murtiyasa, 2023](#); [Wahab A dkk., 2024](#)). Kerangka ini karena itu digunakan untuk membaca perkembangan proses penyelesaian mahasiswa.

**Namun, mengetahui di mana kesalahan muncul belum tentu sama dengan memahami bagaimana kesalahan berkembang sepanjang proses penyelesaian. Penelitian trigonometri berbasis Polya umumnya memetakan kesalahan pada masing-masing tahap ([Gradini dkk., 2022](#); [Khofifah dkk., 2024](#)). Penelitian yang lebih baru mulai melihat proses secara dinamis melalui lintasan belajar dalam pembuktian identitas trigonometri ([Ade Mirza dkk., 2026](#)), tetapi belum menelusuri bagaimana kesalahan pada suatu tahap berkaitan dengan tahap berikutnya. Dengan demikian, masih diperlukan analisis yang tidak hanya mengidentifikasi jenis dan lokasi kesalahan, tetapi juga keterkaitan kesalahan antartahap dalam satu proses penyelesaian.**

Masalah open-ended memberi ruang bagi mahasiswa untuk menggunakan beragam representasi dan strategi sehingga proses serta kesalahannya dapat ditelusuri ([Eva Wulanningtyas dkk., 2024](#); [Murtafiah dkk., 2023](#)). Variasi respons tersebut dibaca pada dua tingkat. Pola kesalahan merujuk pada konfigurasi kesalahan yang berulang, sedangkan lintasan kesalahan merujuk pada hubungan berurutan yang dapat ditelusuri antara proses atau kesalahan pada suatu tahap dengan tahap berikutnya. Penggunaan istilah lintasan bertolak dari *mathematical problem-solving thinking trajectory* ([Fauzi & Hia, 2022](#)) dan analisis kesalahan Newman yang menunjukkan keterkaitan antartahap ([Zulyanty & Mardia, 2022](#)). Dalam penelitian ini, lintasan digunakan secara operasional dalam tahapan Polya. Beberapa kesalahan dalam satu respons tidak otomatis membentuk lintasan; hubungannya harus dapat ditelusuri dari proses penyelesaian dan, pada kasus terpilih, diperjelas melalui wawancara.

Berdasarkan kesenjangan tersebut, penelitian ini bertujuan mengidentifikasi pola dan menelusuri lintasan kesalahan mahasiswa dalam pemecahan masalah trigonometri open-ended berdasarkan tahapan Polya. Penelitian menjawab dua pertanyaan: (1) apa pola kesalahan mahasiswa berdasarkan tahapan Polya? dan (2) bagaimana keterkaitan kesalahan antartahap membentuk lintasan kesalahan? Penelitian memetakan keseluruhan respons untuk menemukan pola yang berulang, kemudian menelusuri kasus terpilih untuk menjelaskan hubungan antartahap secara lebih mendalam.

## **B. Metode Penelitian**

### **1. Desain Penelitian**

Penelitian ini menggunakan pendekatan kualitatif eksploratif dengan analisis lintas kasus untuk mengidentifikasi pola dan menelusuri lintasan kesalahan mahasiswa dalam pemecahan masalah trigonometri open-ended. Analisis mengacu pada empat tahap Polya: memahami masalah, menyusun rencana, melaksanakan rencana, dan memeriksa kembali. Satu kasus merujuk pada satu mahasiswa beserta keseluruhan responsnya terhadap empat masalah, sedangkan satu respons pada satu masalah diperlakukan sebagai satu unit analisis. Dengan demikian, 85 mahasiswa membentuk 85 kasus yang mencakup 340 unit respons.

Setiap unit respons dianalisis untuk mengidentifikasi proses pemecahan masalah dan kesalahan yang muncul, kemudian profil antarmahasiswa dibandingkan untuk menemukan pola berulang dan hubungan antartahap. Frekuensi kesalahan disajikan secara deskriptif, sedangkan analisis utama tetap kualitatif pada dua tingkat, yaitu pola berdasarkan keseluruhan unit respons dan lintasan pada kasus yang memungkinkan hubungan antartahap ditelusuri secara mendalam.

### **2. Partisipan**

Partisipan terdiri atas 85 mahasiswa tahun pertama yang mengikuti mata kuliah Trigonometri pada semester kedua tahun akademik 2025/2026 di salah satu perguruan tinggi negeri di Indonesia. Pada akhir semester, seluruh partisipan mengerjakan empat masalah trigonometri open-ended sehingga diperoleh 340 respons untuk dianalisis. Setelah seluruh respons dipetakan, mahasiswa dipilih secara purposif untuk mengikuti wawancara berbasis tugas. Pemilihan tidak didasarkan pada tingkat kemampuan, tetapi pada karakteristik respons yang relevan dengan fokus penelitian, yaitu keterkaitan berurutan antartahap, ketidaksesuaian strategi dan pelaksanaan, prosedur benar tetapi pemeriksaan kembali tidak memadai, penggunaan beberapa strategi dengan kesimpulan berbeda, serta respons benar sebagai kasus kontras. Dari pemetaan 340 respons, kasus dibandingkan untuk mengidentifikasi pola yang berulang dan hubungan antartahap yang dapat ditelusuri. Berdasarkan variasi karakteristik penyelesaian, cakupan pola utama, dan kebutuhan kasus kontras, dipilih delapan mahasiswa: A19, B01, B10, A15, A24, B12, A08, dan A28. Jumlah tersebut ditentukan untuk mencakup variasi utama pola dan lintasan yang memerlukan pendalaman, bukan untuk mewakili populasi secara statistik.

### **3. Instrumen Penelitian**

Instrumen utama berupa empat masalah trigonometri open-ended yang dirancang untuk memunculkan variasi representasi, strategi, dan proses penyelesaian. Dengan demikian, respons mahasiswa memberikan informasi tidak hanya tentang hasil akhir, tetapi juga tentang proses yang digunakan. Sebelum digunakan, keempat masalah ditelaah secara kualitatif oleh empat dosen sejawat pada aspek kesesuaian materi, kejelasan bahasa, karakteristik open-ended, potensi memunculkan variasi strategi, dan tingkat kesulitan. Berdasarkan telaah tersebut, keempat masalah dinilai layak digunakan.

**TABEL 1.** Karakteristik masalah trigonometri open-ended

| Masalah | Fokus matematis                                   | Tuntutan utama                                                                                    |
|---------|---------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 1       | Perbandingan trigonometri pada segitiga siku-siku | Memodelkan situasi kontekstual dan menentukan tinggi objek dengan memperhitungkan tinggi pengamat |
| 2       | Aturan sinus pada segitiga umum                   | Mengenali struktur segitiga dan memilih aturan trigonometri yang sesuai                           |
| 3       | Identitas trigonometri                            | Membuktikan kesetaraan bentuk dan memeriksa domain keberlakuannya                                 |
| 4       | Fungsi trigonometri                               | Menentukan model fungsi dari karakteristik yang diberikan dan menghubungkannya dengan grafik      |

Keempat masalah mencakup perbandingan trigonometri pada segitiga siku-siku, aturan sinus pada segitiga umum, pembuktian identitas beserta domainnya, serta pemodelan fungsi dan grafik trigonometri. Variasi tuntutan tersebut memungkinkan munculnya kesalahan konseptual, representasi, strategi, prosedural, dan verifikasi.

#### 4. Prosedur Pengumpulan Data

Pengumpulan data dilakukan dalam dua tahap. Pertama, seluruh mahasiswa menyelesaikan empat masalah open-ended dan menuliskan proses penyelesaiannya. Respons kemudian diorganisasikan berdasarkan mahasiswa dan soal serta dipetakan untuk mengidentifikasi variasi penyelesaian dan kesalahan. Kedua, delapan mahasiswa terpilih mengikuti wawancara berbasis tugas. Pertanyaan disusun berdasarkan pekerjaan masing-masing untuk memperjelas alasan penggunaan konsep, representasi, strategi, atau langkah yang belum sepenuhnya dapat ditelusuri dari jawaban tertulis. Data wawancara digunakan untuk memperdalam interpretasi kasus, bukan untuk mewakili seluruh partisipan secara statistik.

#### 5. Analisis Data

Analisis dimulai dengan mengorganisasikan 340 respons berdasarkan mahasiswa dan soal. Setiap respons dianalisis menurut empat tahap Polya dan dibaca sebagai memadai, sebagian, salah, atau tidak terdapat bukti tertulis. Ketiadaan bukti, terutama pada tahap memeriksa kembali, hanya ditafsirkan sebagai tidak adanya aktivitas yang terdokumentasi, bukan sebagai ketidakmampuan mahasiswa. Selanjutnya, kesalahan dikodekan ke dalam lima kategori operasional: konseptual, representasi, strategi, prosedural, dan verifikasi. Satu respons dapat memuat lebih dari satu kategori, sedangkan respons tanpa penyelesaian dicatat sebagai tidak menjawab.

**TABEL 2.** Definisi operasional kategori kesalahan

| Kategori               | Definisi operasional                                                                                                                                             |
|------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Kesalahan konseptual   | Penggunaan atau pemaknaan konsep, sifat, atau syarat matematis yang tidak tepat.                                                                                 |
| Kesalahan representasi | Ketidaktepatan dalam membentuk, membaca, atau menghubungkan diagram, model, simbol, atau grafik.                                                                 |
| Kesalahan strategi     | Pemilihan pendekatan, aturan, atau formula yang tidak sesuai dengan struktur masalah.                                                                            |
| Kesalahan prosedural   | Kesalahan ketika menjalankan perhitungan, manipulasi aljabar, atau urutan langkah setelah strategi dipilih.                                                      |
| Kesalahan verifikasi   | Ketidaktepatan atau ketiadaan pemeriksaan terhadap domain, keabsahan operasi, konsistensi representasi, atau kewajaran hasil yang dapat ditelusuri dari respons. |

Hasil pengodean kemudian dibandingkan untuk mengidentifikasi pola kesalahan yang berulang dan menelusuri hubungan antartahap. Beberapa kesalahan dalam satu respons tidak otomatis dikategorikan sebagai lintasan; lintasan ditetapkan hanya ketika hubungan berurutan dapat ditelusuri dari proses penyelesaian dan, pada kasus terpilih, diperjelas melalui wawancara. Kasus-kasus terpilih selanjutnya dibandingkan melalui analisis lintas kasus, termasuk respons benar sebagai kasus kontras. Definisi kategori, catatan pengodean, contoh bukti, dan perubahan keputusan analitik didokumentasikan.



Gambar 1. Alur penelitian dan analisis data

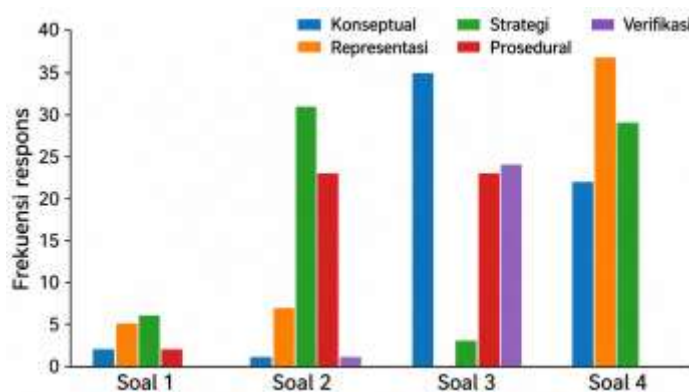
### C. Hasil Penelitian dan Pembahasan

Analisis terhadap 340 respons menunjukkan bahwa karakter kesalahan berbeda menurut tuntutan setiap masalah. Karena itu, hasil dibaca tidak hanya berdasarkan frekuensi kesalahan, tetapi juga posisi dan keterkaitan kesalahan sepanjang proses pemecahan masalah.

#### 1. Karakteristik Kesalahan pada Empat Masalah

TABEL 3. Distribusi jenis kesalahan berdasarkan masalah

| Soal | Konseptual | Representasi | Strategi | Prosedural | Verifikasi | Tidak menjawab |
|------|------------|--------------|----------|------------|------------|----------------|
| 1    | 2          | 5            | 6        | 2          | 0          | 0              |
| 2    | 1          | 7            | 31       | 23         | 1          | 3              |
| 3    | 35         | 0            | 3        | 23         | 24         | 11             |
| 4    | 22         | 37           | 29       | 0          | 0          | 36             |



Gambar 2. Distribusi jenis kesalahan pada empat masalah

Masalah pertama paling banyak diselesaikan dengan benar, dengan kesalahan yang relatif terbatas pada representasi dan strategi. Kesulitan meningkat pada masalah kedua, terutama pada strategi dan prosedur. Beberapa mahasiswa menggunakan rasio trigonometri segitiga siku-siku pada segitiga umum. A19, misalnya, memperlakukan hubungan sisi seolah-olah memenuhi struktur siku-siku, sedangkan B01 memilih  $\tan 45^\circ$  karena sudut tersebut familiar dan mudah dihitung.

Pada masalah ketiga, kesalahan konseptual, prosedural, dan verifikasi lebih menonjol. Sebanyak 19 respons menunjukkan transformasi identitas yang benar tetapi tanpa pemeriksaan domain. Masalah keempat paling banyak tidak dijawab dan didominasi kesalahan representasi serta strategi. Pada 10 respons, model fungsi telah ditentukan dengan tepat tetapi grafiknya tidak konsisten. Temuan tersebut menunjukkan bahwa karakter kesalahan berubah sesuai tuntutan matematis setiap masalah.

## 2. Pola Kesalahan yang Berulang

**TABEL 4.** Pola penting yang teridentifikasi pada keseluruhan respons

| Pola                                                                                                | Frekuensi respons |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------|
| Memperlihatkan pemahaman/representasi awal tetapi tidak berkembang menjadi rencana atau pelaksanaan | 23                |
| Kesalahan representasi, strategi, dan prosedural muncul dalam satu proses penyelesaian              | 5                 |
| Pemahaman dan strategi tepat tetapi pelaksanaan salah                                               | 2                 |
| Pembuktian identitas secara simbolik benar tetapi domain tidak diperiksa                            | 19                |
| Model fungsi ditentukan tetapi grafik tidak konsisten                                               | 10                |
| Tidak terdapat bukti tertulis pemeriksaan kembali pada respons yang dijawab                         | 172               |
| Satu nilai contoh digunakan sebagai bukti pernyataan identitas yang bersifat umum                   | 3                 |

Pola pertama menunjukkan titik rawan pada transisi dari memahami masalah menuju menyusun rencana. Sebanyak 23 respons memperlihatkan pemahaman atau representasi awal yang tidak berkembang menjadi strategi dan pelaksanaan. A24 mampu mengenali hubungan geometris tetapi tidak menentukan formula, sedangkan B10 mengetahui bahwa masalah melibatkan segitiga non-siku-siku tetapi tidak menghubungkannya dengan aturan sinus atau kosinus.

Pada pembuktian identitas, tiga mahasiswa menggunakan satu nilai contoh untuk menerima pernyataan umum, sedangkan 19 respons menunjukkan pembuktian simbolik yang benar tanpa pemeriksaan domain. Selain itu, 172 respons yang dijawab tidak memperlihatkan bukti tertulis pemeriksaan kembali. Angka ini tidak digunakan untuk menyimpulkan ketidakmampuan melakukan verifikasi, tetapi menunjukkan bahwa aktivitas tersebut tidak terdokumentasi. Kasus B12 memperlihatkan bagaimana dua hasil yang berbeda belum segera mendorong mahasiswa mengevaluasi kembali strategi yang digunakan.

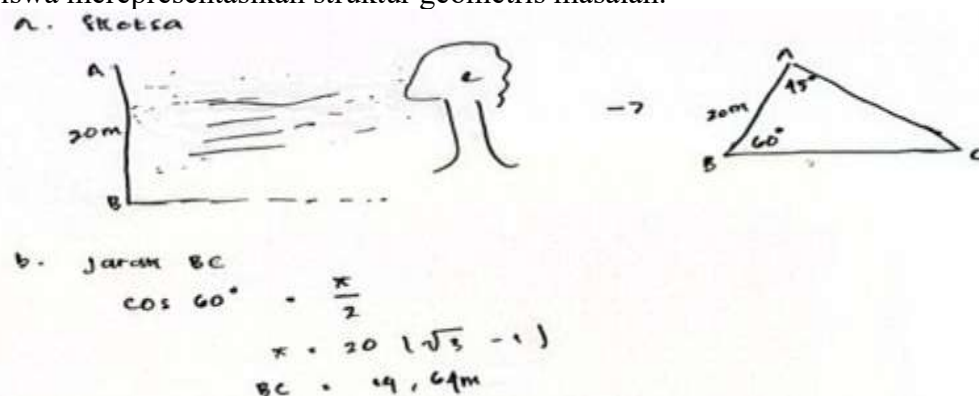
## 3. Lintasan Kesalahan

Berdasarkan analisis lintas kasus, empat lintasan utama teridentifikasi sebagaimana disajikan pada Tabel 5:

**TABEL 5.** Lintasan kesalahan utama dan kasus ilustratif

| Lintasan | Karakter hubungan antartahap                                                                            | Kasus ilustratif            |
|----------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------|
| 1        | Kesalahan representasi diikuti pemilihan strategi yang tidak sesuai dan kesalahan prosedural            | A19                         |
| 2        | Pemahaman memadai tetapi strategi tidak tepat atau tidak terbentuk, kemudian pelaksanaan tidak berhasil | B01, A24, B10               |
| 3        | Strategi telah tepat tetapi kesalahan baru muncul pada pelaksanaan                                      | 2 respons                   |
| 4        | Pemahaman, strategi, dan pelaksanaan tepat tetapi pemeriksaan kembali tidak memadai                     | A15; 19 respons pada Soal 3 |

Lintasan kesalahan ditetapkan ketika terdapat hubungan berurutan yang dapat ditelusuri antara proses atau kesalahan pada suatu tahap dengan tahap berikutnya. Lintasan pertama terlihat pada A19. Pada Soal 2, mahasiswa menggunakan rasio cosinus dengan memperlakukan AB sebagai sisi samping dan BC sebagai sisi miring, meskipun segitiga bukan siku-siku. Dalam wawancara, A19 menjelaskan, “Saya ingat cos itu samping bagi miring. Saya menganggap AB sisi samping dan BC sisi miring,” serta mengakui bahwa ia mengira rasio sinus, cosinus, dan tangen dapat digunakan pada sembarang segitiga. Bukti tertulis dan wawancara menunjukkan bahwa kesalahan strategi dapat ditelusuri dari cara mahasiswa merepresentasikan struktur geometris masalah.



Gambar 3. Respons tertulis A19 pada Soal 2

Lintasan kedua menunjukkan bahwa kesalahan tidak selalu dimulai dari ketidakpahaman. B01, A24, dan B10 telah mengenali sebagian struktur masalah, tetapi tidak mengembangkan strategi yang tepat. Sebaliknya, lintasan ketiga ditemukan pada dua respons ketika mahasiswa telah memahami masalah dan memilih strategi yang sesuai, tetapi kesalahan baru muncul pada tahap pelaksanaan.

Lintasan keempat terlihat pada A15. Respons tertulis menunjukkan pemilihan identitas dan transformasi simbolik yang benar, tetapi mahasiswa menyimpulkan bahwa kesetaraan berlaku untuk semua bilangan real. Dalam wawancara, A15 menjelaskan bahwa kesamaan bentuk kedua ruas dianggap cukup untuk menyimpulkan keberlakuan umum. Setelah diminta memeriksa nilai yang menyebabkan penyebut nol, mahasiswa menyadari bahwa ekspresi tidak selalu terdefinisi. Kasus ini menunjukkan bahwa kesalahan dapat baru muncul pada tahap memeriksa kembali.

- a. pernyataan diatas sudah benar (iya)
- b. As- Alasannya karena didasarkan pada rumus identitas sudut ganda dalam trigonometri
- c. 
$$\frac{1 - \cos 2x}{\sin 2x} = \frac{2 \sin^2 x}{2 \sin x \cos x} = \frac{\sin x}{\sin x \cos x} \cdot \frac{\sin x \sin x}{\sin x \cos x}$$
$$= \frac{\sin x}{\cos x} = \tan x$$
- d. karena menghasilkan  $\tan x$  setelah per pembuktian ternyata benar

Gambar 4. Respons tertulis A15 pada Soal 3

B12 memperlihatkan variasi tambahan yang memperkuat pentingnya pemeriksaan kembali. Pada masalah kedua, mahasiswa memperoleh hasil sekitar 40 m melalui rasio cosinus dan sekitar 14,64 m melalui aturan sinus. Pada awalnya kedua hasil dianggap mungkin benar karena sama-sama diperoleh melalui formula yang dikenal. Setelah struktur segitiga diperiksa kembali, mahasiswa menyadari bahwa rasio cosinus yang digunakan mensyaratkan hubungan sisi pada segitiga siku-siku. Kasus ini memperlihatkan bahwa keberadaan dua hasil yang bertentangan belum otomatis mendorong verifikasi yang memadai.

#### 4. Kasus Kontras

A28 digunakan sebagai kasus kontras karena memperlihatkan keterhubungan yang relatif konsisten antartahap. Mahasiswa membedakan penggunaan rasio trigonometri pada segitiga siku-siku dari aturan sinus pada segitiga umum, mempertimbangkan domain pada pembuktian identitas, dan memeriksa kesesuaian model fungsi dengan representasi grafik. Kasus ini tidak digunakan sebagai standar normatif bagi seluruh mahasiswa, tetapi membantu menunjukkan bahwa keberhasilan pemecahan masalah melibatkan koordinasi antara pemahaman, strategi, pelaksanaan, dan pemeriksaan kembali.

### D. Pembahasan

#### 1. Kesalahan Representasi yang Berlanjut pada Kesalahan Strategi dan Prosedural

Temuan pertama menunjukkan bahwa kesalahan representasi dapat berlanjut pada pemilihan strategi dan pelaksanaan yang tidak tepat. Pada A19, struktur segitiga umum direpresentasikan seolah-olah memenuhi hubungan segitiga siku-siku sehingga mahasiswa memilih rasio cosinus dan menjalankan prosedur yang tidak sesuai. Temuan ini sejalan dengan penelitian yang menunjukkan keterkaitan antara kesalahan transformasi, representasi, dan keterampilan proses dalam penyelesaian masalah trigonometri ([Obeng dkk., 2024](#); [Sulistyaningsih dkk., 2021](#); [Wardhani & Argaswari, 2022](#)). Perbedaanannya, penelitian ini menelusuri hubungan tersebut pada satu proses individual, dari representasi masalah hingga strategi dan prosedur, sehingga rangkaian kesalahan diperlakukan sebagai lintasan ketika hubungan antartahap dapat ditelusuri.

Persoalan koordinasi representasi juga terlihat pada masalah fungsi. Sepuluh respons menunjukkan model fungsi yang tepat tetapi grafik yang tidak konsisten, sejalan dengan temuan [Msi dkk. \(2026\)](#) mengenai kesulitan mengoordinasikan representasi dalam penalaran trigonometri. Secara pembelajaran, mahasiswa perlu diminta menjelaskan struktur masalah dan hubungan antarrepresentasi sebelum memilih formula agar titik awal kesalahan dapat dikenali.

#### 2. Pemahaman Masalah Tidak Selalu Menghasilkan Strategi yang Tepat

Sebanyak 23 respons menunjukkan bahwa pemahaman atau representasi awal telah terbentuk tetapi tidak berkembang menjadi rencana dan pelaksanaan. Temuan ini memperlihatkan bahwa

mengenali informasi yang diberikan berbeda dari menentukan bagaimana informasi tersebut digunakan untuk menyelesaikan masalah. Pada kasus A24 dan B10, struktur awal masalah dapat dikenali, tetapi mahasiswa tidak berhasil menghubungkannya dengan aturan yang diperlukan. B01 memperlihatkan bentuk yang sedikit berbeda. Mahasiswa menggunakan  $\tan 45^\circ$  karena sudut tersebut familiar, meskipun strategi tersebut tidak sesuai dengan struktur masalah.

Hasil tersebut konsisten dengan [Maharani & Murtiyasa \(2023\)](#), yang menemukan bahwa kesalahan pada tahap menyusun rencana lebih tinggi daripada kesalahan pada tahap memahami masalah. Kajian [Wahab A dkk. \(2024\)](#) juga menunjukkan bahwa menyusun rencana menuntut lebih dari sekadar mengenali informasi karena pemecah masalah harus menghubungkan konsep, membangun model, dan memilih strategi yang sesuai. Dalam konteks trigonometri, [Ramadhan & Santoso \(2025\)](#) menunjukkan bahwa kesalahan transformasi berkaitan dengan kelemahan inferensi, sedangkan kesalahan keterampilan proses berkaitan dengan kelemahan penalaran dan evaluasi logis. Temuan tersebut memperkuat perbedaan antara memahami informasi, mengubahnya menjadi strategi, dan menjalankan strategi tersebut.

Temuan [Msi dkk. \(2026\)](#) memberi sudut pandang tambahan. Mereka menemukan kecenderungan siswa mengandalkan prosedur dengan pemahaman terbatas dan menggunakan strategi tingkat permukaan ketika tugas menuntut penalaran terhadap klaim trigonometri. Kondisi tersebut membantu menjelaskan kasus seperti B01. Mahasiswa tidak sepenuhnya gagal memahami informasi, tetapi memilih aturan berdasarkan elemen yang familiar dan bukan berdasarkan struktur matematis yang harus dipenuhi.

Kontribusi temuan penelitian ini terletak pada penempatan transisi dari memahami masalah menuju menyusun rencana sebagai salah satu titik kritis lintasan kesalahan. Dengan demikian, lintasan kesalahan tidak selalu dimulai dari kegagalan memahami masalah. Pada sebagian respons, mahasiswa telah memiliki pemahaman awal yang memadai, tetapi arah penyelesaian berubah ketika pemahaman tersebut harus diterjemahkan menjadi strategi. Perbedaan ini penting secara diagnostik karena mahasiswa yang belum memahami masalah membutuhkan dukungan yang berbeda dari mahasiswa yang memahami masalah tetapi belum mampu mengembangkan strategi yang sesuai.

### 3. Strategi Sudah Tepat tetapi Kesalahan Terjadi pada Pelaksanaan

Lintasan ketika strategi telah tepat tetapi kesalahan baru muncul pada tahap pelaksanaan ditemukan pada dua respons. Jumlah tersebut kecil sehingga tidak dapat dipandang sebagai pola dominan. Namun, keberadaannya penting karena menunjukkan bahwa jawaban akhir yang salah tidak selalu merupakan konsekuensi dari pemahaman atau perencanaan yang keliru. Mahasiswa dapat memahami masalah dan memilih strategi yang tepat, tetapi melakukan kesalahan ketika menjalankan perhitungan atau manipulasi aljabar.

([Gradini dkk., 2022](#)) membedakan kesalahan pada tahap menyusun rencana dan melaksanakan rencana, sedangkan ([Maharani & Murtiyasa, 2023](#)) juga menunjukkan bahwa kesalahan tetap ditemukan pada kedua tahap tersebut. ([Wardhani & Argaswari, 2022](#)) membedakan kesalahan transformasi dari kesalahan keterampilan proses pada masalah trigonometri. ([Ramadhan & Santoso, 2025](#)) juga menunjukkan bahwa kesalahan keterampilan proses menjadi salah satu bentuk kesalahan yang menonjol pada penyelesaian soal trigonometri. Temuan penelitian ini memperjelas perbedaan tersebut pada tingkat proses individual: strategi dapat tepat, tetapi kesalahan baru muncul ketika strategi tersebut dijalankan.

Implikasinya, diagnosis terhadap jawaban salah perlu menentukan apakah kesalahan berada pada keputusan strategis atau pada cara strategi tersebut dilaksanakan. Mahasiswa yang memilih strategi keliru membutuhkan penguatan hubungan antara struktur masalah dan prinsip trigonometri.

Sebaliknya, mahasiswa yang telah memilih strategi tepat tetapi gagal menjalankannya membutuhkan perhatian pada konsistensi manipulasi, perhitungan, dan hubungan antar langkah.

#### 4. Pelaksanaan Benar tetapi Pemeriksaan Kembali Masih Lemah

Temuan yang paling menonjol pada pembuktian identitas adalah 19 respons yang memperlihatkan transformasi simbolik benar tetapi tidak diikuti pemeriksaan domain. A15 telah menggunakan identitas sudut ganda secara tepat hingga memperoleh bentuk  $\tan x$ , tetapi pada awalnya menyimpulkan bahwa kesetaraan berlaku untuk semua bilangan real. Kasus tersebut menunjukkan bahwa keberhasilan manipulasi simbolik belum cukup untuk menjamin keabsahan kesimpulan apabila syarat keberlakuan ekspresi asal tidak diperiksa.

Temuan ini konsisten dengan penelitian berbasis Polya yang menunjukkan bahwa tahap memeriksa kembali tetap menjadi sumber kesulitan. (Maharani & Murtiyasa, 2023) melaporkan kesalahan pada tahap memeriksa kembali sebesar 30,52%, sedangkan (Gradini dkk., 2022) juga menemukan kesalahan pada tahap akhir pemecahan masalah. (Msi dkk., 2026) memperlihatkan persoalan yang searah pada tugas penalaran dan pembuktian trigonometri. Wawancara mereka menunjukkan kesadaran metakognitif yang terbatas, sementara hasil penelitian menekankan perlunya penalaran reflektif ketika siswa mengevaluasi klaim dan prosedur trigonometri.

Masalah ketiga juga mengungkap bentuk kesalahan pembuktian yang berbeda. Tiga mahasiswa menggunakan satu nilai, terutama  $x = 45$  derajat, untuk menyimpulkan kebenaran identitas secara umum. Temuan ini sejalan dengan (Herizal, 2025), yang mengidentifikasi penggunaan contoh untuk membuktikan suatu pernyataan sebagai salah satu bentuk kesalahan dalam pembuktian matematis pada materi aplikasi trigonometri. (Buchbinder & McCrone, 2023) juga menekankan bahwa contoh dapat mendukung eksplorasi dan pemahaman, tetapi tidak membuktikan pernyataan universal.

Perbandingan tersebut memperlihatkan dua sumber kesalahan yang berbeda pada masalah pembuktian. Pada kasus B10, persoalan berada pada cara membangun bukti karena satu contoh digunakan untuk menerima pernyataan umum. Pada A15, pembuktian simbolik telah benar, tetapi pemeriksaan terhadap domain tidak dilakukan. Dengan demikian, dua respons dapat sama-sama menghasilkan kesimpulan yang tidak memadai meskipun titik munculnya kesalahan berbeda. Hal ini memperkuat kebutuhan untuk membaca proses secara bertahap dan tidak menempatkan semua kesalahan pembuktian dalam satu kategori yang sama.

Kasus B12 semakin memperlihatkan fungsi tahap memeriksa kembali. Mahasiswa memperoleh dua hasil berbeda dari dua strategi, tetapi pertentangan tersebut pada awalnya tidak segera digunakan untuk mengevaluasi kembali keabsahan metode. Baru setelah struktur segitiga diperiksa kembali, mahasiswa mengenali bahwa salah satu rasio yang digunakan mensyaratkan struktur segitiga siku-siku. Kasus ini menunjukkan bahwa tersedianya informasi yang bertentangan belum otomatis menghasilkan verifikasi. Mahasiswa masih perlu menggunakan ketidakkonsistenan sebagai alasan untuk meninjau kembali strategi dan hasil.

Karena itu, pemeriksaan kembali dalam trigonometri tidak cukup dimaknai sebagai mengulang perhitungan. Pemeriksaan perlu mencakup domain, syarat penggunaan formula, konsistensi antarrepresentasi, kesesuaian hasil dengan struktur masalah, dan keabsahan bentuk pembuktian. Ketiadaan bukti tertulis pemeriksaan pada 172 respons memang tidak dapat ditafsirkan sebagai ketidakmampuan melakukan verifikasi. Namun, banyaknya respons tanpa dokumentasi pemeriksaan menunjukkan bahwa aktivitas tersebut perlu dibuat lebih eksplisit dalam pembelajaran dan asesmen.

#### 5. Pola dan Lintasan Kesalahan sebagai Kontribusi Penelitian

Penelitian ini membedakan pola dan lintasan kesalahan. Pola merujuk pada konfigurasi kesalahan yang berulang pada sejumlah respons, sedangkan lintasan merujuk pada hubungan

berurutan antara proses atau kesalahan pada satu tahap dengan tahap berikutnya yang dapat ditelusuri dalam satu proses penyelesaian. Karena itu, beberapa kesalahan yang muncul dalam satu respons tidak otomatis diperlakukan sebagai lintasan.

Gagasan mengenai keterkaitan antartahap telah muncul dalam analisis kesalahan Newman. [Wardhani & Argaswari \(2022\)](#) serta [Zulyanty & Mardia \(2022\)](#) menunjukkan bahwa kesalahan pada tahap awal dapat berkaitan dengan tahap berikutnya. Istilah trajectory juga digunakan [Fauzi & Hia \(2022\)](#) untuk menggambarkan urutan aktivitas pemecahan masalah. Penelitian ini menggunakan gagasan tersebut secara lebih spesifik untuk menelusuri bagaimana kesalahan muncul atau berkembang melalui tahap memahami masalah, menyusun rencana, melaksanakan rencana, dan memeriksa kembali.

Empat lintasan yang ditemukan menunjukkan bahwa titik awal kesalahan tidak tunggal: kesalahan dapat bermula pada representasi, muncul ketika pemahaman diterjemahkan menjadi strategi, baru terjadi saat strategi dilaksanakan, atau muncul setelah prosedur selesai karena pemeriksaan tidak memadai. Kontribusi penelitian ini bukan membangun teori baru, tetapi memperluas analisis berbasis Polya dari pemetaan kesalahan per tahap menuju pembacaan yang lebih relasional dan diagnostik terhadap hubungan antartahap.

## 6. Implikasi Pembelajaran

Temuan menunjukkan bahwa pembelajaran trigonometri perlu menjadikan pemeriksaan proses sebagai bagian eksplisit dari pemecahan masalah. Mahasiswa perlu memeriksa struktur dan representasi sebelum memilih formula, menjelaskan alasan pemilihan strategi, menjaga konsistensi pelaksanaan, serta mengevaluasi domain, syarat penggunaan formula, konsistensi simbol-grafik, dan kewajaran hasil.

Masalah open-ended memberi ruang bagi variasi representasi dan strategi sehingga berguna untuk diagnosis proses, bukan hanya untuk memperoleh beragam jawaban. Dosen dapat menggunakan pertanyaan seperti “Mengapa strategi ini dapat digunakan?”, “Apakah langkah ini masih konsisten dengan rencana?”, dan “Apakah hasil serta syarat keberlakuannya telah diperiksa?” untuk menentukan titik ketika proses mulai berubah arah dan memberikan dukungan sesuai lokasi kesalahan.

## E. Kesimpulan

Kesalahan mahasiswa dalam pemecahan masalah trigonometri *open-ended* menunjukkan karakter yang berbeda sesuai tuntutan masalah dan tidak selalu muncul pada tahap yang sama. Masalah segitiga umum didominasi kesalahan strategi dan prosedural, pembuktian identitas menonjolkan kesalahan konseptual dan verifikasi, sedangkan pemodelan fungsi dan grafik memperlihatkan kesalahan representasi dan strategi. Analisis keseluruhan respons menghasilkan sejumlah pola berulang, termasuk pemahaman awal yang tidak berkembang menjadi rencana, pembuktian simbolik tanpa pemeriksaan domain, serta model fungsi yang benar tetapi tidak konsisten dengan grafik. Analisis lintas kasus mengidentifikasi empat lintasan utama: kesalahan representasi yang berlanjut pada strategi dan prosedur; pemahaman yang memadai tetapi strategi tidak tepat atau tidak terbentuk; strategi yang tepat tetapi kesalahan muncul pada pelaksanaan; serta pelaksanaan benar yang diikuti pemeriksaan kembali yang tidak memadai. Temuan ini menunjukkan bahwa titik awal kesalahan dapat berpindah sepanjang tahapan Polya. Oleh karena itu, analisis kesalahan tidak cukup hanya mengidentifikasi jenis atau lokasi kesalahan, tetapi juga perlu menelusuri hubungan antartahap ketika bukti proses penyelesaian memungkinkan. Perspektif pola dan lintasan kesalahan dapat membantu dosen memberikan dukungan yang lebih diagnostik sesuai titik munculnya kesulitan mahasiswa.

### Daftar Pustaka

- Ade Mirza, Winarji, A., Metia Novianti, Ferah Ningtias, & Muhammad Arjuna. (2026). Exploring learning trajectories in trigonometric identity proof construction through didactic transposition. *Al-Jabar : Jurnal Pendidikan Matematika*, 17(1), 493–509. <https://doi.org/10.24042/ajpm.v17i1.30223>
- Buchbinder, O., & McCrone, S. (2023). Preparing prospective secondary teachers to teach mathematical reasoning and proof: The case of the role of examples in proving. *ZDM – Mathematics Education*, 55(4), 779–792. <https://doi.org/10.1007/s11858-023-01493-4>
- Eva Wulanningtyas, M., Arfin, A., Linling, Y., Slamet Setiana, D., & Boriboon, G. (2024). Learning Mathematics through Students' Worksheets with Open-Ended Approach: A Students' Errors Analysis on Mathematical Problem-Solving Ability. *Jurnal Pendidikan MIPA*, 25(1), 468–485. <https://doi.org/10.23960/jpmipa/v25i1.pp468-485>
- Fauzi, K. M. A., & Hia, Y. (2022). Types of student errors in the trajectory of thinking solving analytical geometry questions based on Newman's Error Analysis (NEA). *AIP Conference Proceedings*, 2659(1), 100011. <https://doi.org/10.1063/5.0113797>
- Gradini, E., Yustinaningrum, B., & Safitri, D. (2022). Kesalahan Siswa Dalam Memecahkan Masalah Trigonometri Ditinjau dari Indikator Polya. *Mosharafa: Jurnal Pendidikan Matematika*, 11(1), 49–60. <https://doi.org/10.31980/mosharafa.v11i1.686>
- Herizal. (2025). Identifikasi kesalahan pembuktian matematis siswa pada materi aplikasi trigonometri. *Jurnal Pendidik Indonesia*, 6(2), 64–74. <https://doi.org/10.61291/jpi.v6i2.74>
- Hidayat, W., & Aripin, U. (2020). Identifikasi Kesalahan Jawaban Mahasiswa Pada Mata Kuliah Trigonometri Berdasarkan Dimensi Pengetahuan Krathwohl. *JNPM (Jurnal Nasional Pendidikan Matematika)*, 4(1), 142. <https://doi.org/10.33603/jnpm.v4i1.3316>
- Khofifah, K., Rosyadi, R., Gunadi, F., Nandang, N., & Runisah, R. (2024). Students' Difficulties In Solve Trigonometry Problem Solving According To Step Polya's. *Mathline : Jurnal Matematika dan Pendidikan Matematika*, 9(3), 919–946. <https://doi.org/10.31943/mathline.v9i3.571>
- Maharani, R., & Murtiyasa, B. (2023). Analysis Of Students' Error In Solving Trigonometry Comparison Problems With The Polya Criteria Guiden. *Prima: Jurnal Pendidikan Matematika*, 7(2), 157. <https://doi.org/10.31000/prima.v7i2.8482>
- Msi, Y., Matsepe, M. E., & Sehowa, K. (2026). Errors in trigonometric proof-related reasoning tasks: Insights from Grade 10 learners at a rural Eastern Cape school. *African Journal of Teacher Education and Development*, 5(1), a132. <https://doi.org/10.4102/AJOTED.v5i1.132>
- Murtafiah, W., Lestari, N. D. S., Yahya, F. H., Apriandi, D., & Suprpto, E. (2023). How Do Students' Decision-Making Ability In Solving Open-Ended Problems? *Infinity Journal*, 12(1), 133. <https://doi.org/10.22460/infinity.v12i1.p133-150>

- Nabie, M. J., Akayuure, P., Ibrahim-Bariham, U. A., & Sofo, S. (2018). Trigonometric Concepts: Pre-Service Teachers' Perceptions And Knowledge. *Journal on Mathematics Education*, 9(2), 169–182. <https://doi.org/10.22342/jme.9.2.5261.169-182>
- Obeng, B. A., Banson, G. M., Owusu, E., & Owusu, R. (2024). Analysis of senior high school students' errors in solving trigonometry. *Cogent Education*, 11(1), 2385119. <https://doi.org/10.1080/2331186X.2024.2385119>
- Pólya, G. (2014). *How to solve it: A new aspect of mathematical method*. Princeton University Press. <https://doi.org/10.1515/9781400828678>
- Ramadhan, D., & Santoso, E. (2025). Newman's Error Analysis of Trigonometry: Critical Thinking Perspective. *Jurnal Pendidikan MIPA*, 26(4), 2321–2342. <https://doi.org/10.23960/jpmipa.v26i4.pp2321-2342>
- Setiawan, Y. E. S. & Sunardi. (2023). Classification of errors in determining trigonometry function values at standard positions. *JRAMathEdu (Journal of Research and Advances in Mathematics Education)*. <https://doi.org/10.23917/jramathedu.v8i2.1625>
- Sulistyaningsih, D., Purnomo, E. A., & Purnomo, P. (2021). Polya's Problem Solving Strategy in Trigonometry: An Analysis of Students' Difficulties in Problem Solving. *Mathematics and Statistics*, 9(2), 127–134. <https://doi.org/10.13189/ms.2021.090206>
- Wahab A, A., Kusuma, Y. S., Juandi, D., Turmudi, T., Buhaerah, B., & Syaiful, S. (2024). Understanding Students' Struggles in Solving Mathematical Problems: A Systematic Literature Review Using Polya's Framework. *Jurnal Pendidikan Progresif*, 14(3), 1728–1753. <https://doi.org/10.23960/jpp.v14.i3.2024118>
- Wardhani, T. A. W., & Argaswari, D. P. A. D. (2022). High School Students' Error In Solving Word Problem Of Trigonometry Based On Newman Error Hierarchical Model. *Infinity Journal*, 11(1), 87. <https://doi.org/10.22460/infinity.v11i1.p87-102>
- Zulyanty, M., & Mardia, A. (2022). Do students' errors still occur in mathematical word problem-solving?: A newman error analysis. *Al-Jabar : Jurnal Pendidikan Matematika*, 13(2), 343–353. <https://doi.org/10.24042/ajpm.v13i2.13519>